Ograniczenia logiki pierwszego rzędu

W tym wykładzie zakładamy, że nie ma symboli funkcyjnych w sygnaturze.

Ranga kwantyfikatorowa formuły

$QR(\varphi)$ definiujemy następująco:

Ranga kwantyfikatorowa formuły

$QR(\varphi)$ definiujemy następująco:

- $QR(\bot) = QR(t_1 = t_2) = QR(r(t_1, \ldots, t_k)) = 0$ dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_k$ oraz $r \in \Sigma_k^R$.

Ranga kwantyfikatorowa formuły

$QR(\varphi)$ definiujemy następująco:

- $QR(\perp) = QR(t_1 = t_2) = QR(r(t_1, \ldots, t_k)) = 0$ dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_k$ oraz $r \in \Sigma_k^R$.
- $QR(\varphi \to \psi) = \max(QR(\varphi), QR(\psi))$.

Ranga kwantyfikatorowa formuły

$QR(\varphi)$ definiujemy następująco:

- $QR(\bot) = QR(t_1 = t_2) = QR(r(t_1, \ldots, t_k)) = 0$ dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_k$ oraz $r \in \Sigma_k^R$.
- $QR(\varphi \to \psi) = \max(QR(\varphi), QR(\psi))$.
- $QR(\forall x \varphi) = 1 + QR(\varphi)$.

Ranga kwantyfikatorowa formuły

$QR(\varphi)$ definiujemy następująco:

- $QR(\perp) = QR(t_1 = t_2) = QR(r(t_1, \ldots, t_k)) = 0$ dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_k$ oraz $r \in \Sigma_k^R$.
- $QR(\varphi \to \psi) = \max(QR(\varphi), QR(\psi))$.
- $QR(\forall x \varphi) = 1 + QR(\varphi)$.

Nieformalnie: QR to głębokość zagnieżdżenia kwantyfikatorów w formule.

Podstruktura indukowana

Niech $\mathfrak{A}$ będzie strukturą relacyjną.
Niech $\emptyset \neq B \subseteq A$.

Podstruktura indukowana

Niech $\mathfrak{A}$ będzie strukturą relacyjną.
Niech $\emptyset \neq B \subseteq A$.
$\mathfrak{A}_{|B}$ to struktura na tą samą sygnaturą Σ co $\mathfrak{A}$:

Podstruktura indukowana

Niech $\mathfrak{A}$ będzie strukturą relacyjną.
Niech $\emptyset \neq B \subseteq A$.
$\mathfrak{A}_{|B}$ to struktura na tą samą sygnaturą Σ co $\mathfrak{A}$:

- uniwersum $\mathfrak{A}_{|B}$ to B

Podstruktura indukowana

Niech $\mathfrak{A}$ będzie strukturą relacyjną.
Niech $\emptyset \neq B \subseteq A$.
$\mathfrak{A}_{|B}$ to struktura na tą samą sygnaturą Σ co $\mathfrak{A}$:

- uniwersum $\mathfrak{A}_{|B}$ to B
- dla $r \in \Sigma_n^R$ definiujemy $r^{\mathfrak{A}_{|B}} = r^{\mathfrak{A}} \cap B^n$.

Częściowy izomorfizm

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury relacyjne nad Σ.
Niepuste zbiory $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$.

Częściowy izomorfizm

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury relacyjne nad Σ.
Niepuste zbiory $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$.

Izomorfizm $h : A' \to B'$ podstruktur indukowanych $h : \mathfrak{A}_{|A'} \cong \mathfrak{B}_{|B'}$ nazywamy <u>częściowym izomorfizmem z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.</u>

Częściowy izomorfizm

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury relacyjne nad Σ.
Niepuste zbiory $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$.

Izomorfizm $h : A' \to B'$ podstruktur indukowanych $h : \mathfrak{A}_{|A'} \cong \mathfrak{B}_{|B'}$ nazywamy <u>częściowym izomorfizmem z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.</u>
Jego <u>dziedzina</u> to $dom(h) = A'$, a <u>obraz</u> to $rg(h) = B'$.

Częściowy izomorfizm cd

Umawiamy się, że $\emptyset$ jest częściowym izomorfizmem z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ o pustej dziedzinie i pustym obrazie.

Częściowy izomorfizm cd

Umawiamy się, że $\emptyset$ jest częściowym izomorfizmem z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ o pustej dziedzinie i pustym obrazie.

Dla dwóch częściowych izomorfizmów g, h z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$ piszemy $g \subseteq h$ gdy $dom(g) \subseteq dom(h)$ oraz $g(a) = h(a)$ dla wszystkich $a \in dom(g)$, to jest wtedy, gdy g jest zawarte jako zbiór w h.

m-izomorfizm

Niech $m \in \mathbb{N}$.

Struktury $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są <u>m-izomorficzne</u> (ozn. $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$), gdy istnieje rodzina $\{I_n \mid n \leq m\}$ taka, że:

m-izomorfizm

Niech $m \in \mathbb{N}$.

Struktury $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są $\underline{m\text{-izomorficzne}}$ (ozn. $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$), gdy istnieje rodzina $\{I_n \mid n \leq m\}$ taka, że:

Izo każdy I_n jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$

m-izomorfizm

Niech $m \in \mathbb{N}$.

Struktury $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są m-izomorficzne (ozn. $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$), gdy istnieje rodzina $\{I_n \mid n \leq m\}$ taka, że:

- **Izo** każdy I_n jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$
- **Tam** Dla każdego $h \in I_{n+1}$ oraz każdego $a \in A$ istnieje takie $g \in I_n$, że $h \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.

m-izomorfizm

Niech $m \in \mathbb{N}$.

Struktury $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są *m-izomorficzne* (ozn. $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$), gdy istnieje rodzina $\{I_n \mid n \leq m\}$ taka, że:

- **Izo** każdy I_n jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$
- **Tam** Dla każdego $h \in I_{n+1}$ oraz każdego $a \in A$ istnieje takie $g \in I_n$, że $h \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- **Z powrotem** Dla każdego $h \in I_{n+1}$ oraz każdego $b \in B$ istnieje takie $g \in I_n$, że $h \subseteq g$ oraz $b \in rg(g)$.

m-izomorfizm

Niech $m \in \mathbb{N}$.

Struktury $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są m-izomorficzne (ozn. $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$), gdy istnieje rodzina $\{I_n \mid n \leq m\}$ taka, że:

- **Izo** każdy I_n jest niepustym zbiorem częściowych izomorfizmów z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$
- **Tam** Dla każdego $h \in I_{n+1}$ oraz każdego $a \in A$ istnieje takie $g \in I_n$, że $h \subseteq g$ oraz $a \in dom(g)$.
- **Z powrotem** Dla każdego $h \in I_{n+1}$ oraz każdego $b \in B$ istnieje takie $g \in I_n$, że $h \subseteq g$ oraz $b \in rg(g)$.

Rodzinę $\{I_n \mid n \leq m\}$ nazywamy m-izomorfizmem struktur $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, co oznaczamy $\{I_n \mid n \leq m\} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

Skończony izomorfizm

Dwie struktury $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ są skończenie izomorficzne, (ozn. $\mathfrak{A} \cong_{fin} \mathfrak{B}$) gdy istnieje rodzina $\{I_n \mid n \in \omega\}$, taka, że każda podrodzina $\{I_n \mid n \leq m\}$ jest m-izomorfizmem.

Skończony izomorfizm

Dwie struktury $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ są <u>skończenie izomorficzne</u>, (ozn. $\mathfrak{A} \cong_{fin} \mathfrak{B}$) gdy istnieje rodzina $\{I_n \mid n \in \omega\}$, taka, że każda podrodzina $\{I_n \mid n \leq m\}$ jest m-izomorfizmem.

Jeśli $\{I_n \mid n \leq m\}$ ma powyższe własności, to piszemy $\{I_n \mid n \leq \omega\} : \mathfrak{A} \cong_{fin} \mathfrak{B}$
Rodzina to <u>skończony izomorfizm</u>.

Fakt

Skończony izomorfizm

Fakt

- Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_{fin} \mathfrak{B}$.

Skończony izomorfizm

Fakt

- Jeśli $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, to $\mathfrak{A} \cong_{fin} \mathfrak{B}$.
- Jeśli $\mathfrak{A} \cong_{fin} \mathfrak{B}$ oraz nośnik $\mathfrak{A}$ jest zbiorem skończonym, to $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Elementarna równoważność

Przypomnienie:
$\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są elementarnie równoważne (ozn $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), gdy dla każdego zdania φ logiki pierwszego rzędu nad tą samą sygnaturą,
$\mathfrak{A} \models \varphi$ wtw, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Elementarna równoważność

Przypomnienie:
$\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są elementarnie równoważne (ozn $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), gdy dla każdego zdania φ logiki pierwszego rzędu nad tą samą sygnaturą,
$\mathfrak{A} \models \varphi$ wtw, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$.

$\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ tej samej sygnatury są m-elementarnie równoważne (ozn. $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$), gdy dla każdego zdania φ o randze kwantyfikatorowej nie przekraczającej m, zachodzi
$\mathfrak{A} \models \varphi$ wtw, gdy $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Elementarna równoważność cd

Fakt

$\mathfrak{A} \cong_{fin} \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego naturalnego m zachodzi $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

Elementarna równoważność cd

Fakt

$\mathfrak{A} \cong_{fin} \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego naturalnego m zachodzi $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

Dowód:

Załóżmy, że dla każdego m istnieje $\{I_n^m \mid n \leq m\}$ z definicji $\cong_m$.

Niech $\{J_n \mid n \in \omega\}$ będzie zdefiniowane przez

$$J_n = \bigcup_{m \in \omega} I_n^m.$$

Ta rodzina spełnia warunki z definicji $\cong_{fin}$.

Charakteryzacja Fraïssé

Twierdzenie [Fraïssé]

Niech Σ – skończona sygnatura relacyjna

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ struktury nad Σ.

Charakteryzacja Fraïssé

Twierdzenie [Fraïssé]
Niech Σ – skończona sygnatura relacyjna
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ struktury nad Σ.

- Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi równoważność: $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Twierdzenie [Fraïssé]
Niech Σ – skończona sygnatura relacyjna
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ struktury nad Σ.

- Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi równoważność: $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.
- $\mathfrak{A} \cong_{fin} \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Dowód tw. Fraïssé

Dowód tw. Fraïssé

Druga równoważnośc wynika z pierwszej.

Dowód tw. Fraïssé

Druga równoważnośc wynika z pierwszej.
Pierwszą dowodzimy tylko z lewej do prawej strony.

Dowód tw. Fraïssé

Druga równoważnośc wynika z pierwszej.
Pierwszą dowodzimy tylko z lewej do prawej strony. Ustalamy

$m \in \mathcal{N}$.

Teza indukcyjna

Niech

Teza indukcyjna

Niech

- $\{I_n \mid n \leq m\} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$

Teza indukcyjna

Niech

- $\{I_n \mid n \leq m\} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$
- $g \in I_n$

Teza indukcyjna

Niech

- $\{I_n \mid n \leq m\} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$
- $g \in I_n$
- φ to formuła

Teza indukcyjna

Niech

- $\{I_n \mid n \leq m\} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$
- $g \in I_n$
- φ to formuła
  - $FV(\varphi) = x_1, \ldots, x_r$
  - $QR(\varphi) \leq n \leq m$

Teza indukcyjna

Niech

- $\{I_n \mid n \leq m\} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$
- $g \in I_n$
- φ to formuła
  - $FV(\varphi) = x_1, \ldots, x_r$
  - $QR(\varphi) \leq n \leq m$

Wówczas dla każdych $a_1, \ldots, a_r \in dom(g)$ równoważne są:

$$\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \models \varphi$$

$$\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r) \models \varphi.$$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja

Dowód tw. Fraïssé, indukcja

- Dla formuł atomowych teza wynika z tego, że g jest częściowym izomorfizmem

Dowód tw. Fraïssé, indukcja

- Dla formuł atomowych teza wynika z tego, że g jest częściowym izomorfizmem
- Gdy φ to $\psi \to \xi$, to równoważne są:

Dowód tw. Fraïssé, indukcja

- Dla formuł atomowych teza wynika z tego, że g jest częściowym izomorfizmem
- Gdy φ to $\psi \to \xi$, to równoważne są:
  - $\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \models \psi \to \xi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja

- Dla formuł atomowych teza wynika z tego, że g jest częściowym izomorfizmem
- Gdy φ to $\psi \to \xi$, to równoważne są:
  - $\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \models \psi \to \xi$
  - $\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \not\models \psi$ lub $\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \models \xi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja

- Dla formuł atomowych teza wynika z tego, że g jest częściowym izomorfizmem
- Gdy φ to $\psi \to \xi$, to równoważne są:
  - $\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \models \psi \to \xi$
  - $\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \not\models \psi$ lub $\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \models \xi$
  - $\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r) \not\models \psi$ lub $\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r) \models \xi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja

- Dla formuł atomowych teza wynika z tego, że g jest częściowym izomorfizmem
- Gdy φ to $\psi \to \xi$, to równoważne są:
  - $\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \models \psi \to \xi$
  - $\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \not\models \psi$ lub $\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r \models \xi$
  - $\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r) \not\models \psi$ lub $\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r) \models \xi$
  - $\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r) \models \psi \to \xi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja cd

Dowód tw. Fraïssé, indukcja cd

- Niech φ to $\forall x_{r+1} \psi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja cd

- Niech φ to $\forall x_{r+1} \psi$
- Z założenia $QR(\varphi) \leq n$ wynika $QR(\psi) \leq n - 1$.

Dowód tw. Fraïssé, indukcja cd

- Niech φ to $\forall x_{r+1}\psi$
- Z założenia $QR(\varphi) \leq n$ wynika $QR(\psi) \leq n - 1$.
- Równoważne są:
  - $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r) \models \varphi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja cd

- Niech φ to $\forall x_{r+1}\psi$
- Z założenia $QR(\varphi) \leq n$ wynika $QR(\psi) \leq n-1$.
- Równoważne są:
  - $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r) \models \varphi$
  - Dla każdego $a \in A$ zachodzi $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja cd

- Niech φ to $\forall x_{r+1}\psi$
- Z założenia $QR(\varphi) \leq n$ wynika $QR(\psi) \leq n-1$.
- Równoważne są:
  - $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r) \models \varphi$
  - Dla każdego $a \in A$ zachodzi $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$
  - Dla każdego $a \in A$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $a \in dom(h)$ i $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja cd

- Niech φ to $\forall x_{r+1}\psi$
- Z założenia $QR(\varphi) \leq n$ wynika $QR(\psi) \leq n-1$.
- Równoważne są:
  - $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r) \models \varphi$
  - Dla każdego $a \in A$ zachodzi $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$
  - Dla każdego $a \in A$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $a \in dom(h)$ i $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$
  - Dla każdego $a \in A$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $a \in dom(h)$ i $(\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r), x_{r+1} : h(a)) \models \psi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja cd

- Niech φ to $\forall x_{r+1}\psi$
- Z założenia $QR(\varphi) \leq n$ wynika $QR(\psi) \leq n-1$.
- Równoważne są:
  - $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r) \models \varphi$
  - Dla każdego $a \in A$ zachodzi $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$
  - Dla każdego $a \in A$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $a \in dom(h)$ i $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$
  - Dla każdego $a \in A$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $a \in dom(h)$ i $(\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r), x_{r+1} : h(a)) \models \psi$
  - Dla każdego $b \in B$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $b \in rg(h)$ i $(\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r), x_{r+1} : b) \models \psi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja cd

- Niech φ to $\forall x_{r+1} \psi$
- Z założenia $QR(\varphi) \leq n$ wynika $QR(\psi) \leq n - 1$.
- Równoważne są:
  - $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r) \models \varphi$
  - Dla każdego $a \in A$ zachodzi $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$
  - Dla każdego $a \in A$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $a \in dom(h)$ i $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$
  - Dla każdego $a \in A$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $a \in dom(h)$ i $(\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r), x_{r+1} : h(a)) \models \psi$
  - Dla każdego $b \in B$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $b \in rg(h)$ i $(\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r), x_{r+1} : b) \models \psi$
  - Dla każdego $b \in B$ zachodzi $(\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r), x_{r+1} : b) \models \psi$

Dowód tw. Fraïssé, indukcja cd

- Niech φ to $\forall x_{r+1}\psi$
- Z założenia $QR(\varphi) \leq n$ wynika $QR(\psi) \leq n-1$.
- Równoważne są:
  - $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r) \models \varphi$
  - Dla każdego $a \in A$ zachodzi
    $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$
  - Dla każdego $a \in A$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $a \in dom(h)$ i
    $(\mathfrak{A}, x_1 : a_1, \ldots, x_r : a_r, x_{r+1} : a) \models \psi$
  - Dla każdego $a \in A$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $a \in dom(h)$ i
    $(\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r), x_{r+1} : h(a)) \models \psi$
  - Dla każdego $b \in B$ istnieje takie $h \in I_{n-1}$, że $g \subseteq h$, $b \in rg(h)$ i
    $(\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r), x_{r+1} : b) \models \psi$
  - Dla każdego $b \in B$ zachodzi
    $(\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r), x_{r+1} : b) \models \psi$
  - $(\mathfrak{B}, x_1 : g(a_1), \ldots, x_r : g(a_r)) \models \varphi$.

Przykład ograniczenia logiki pierwszego rzędu

Fakt

Jeśli $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ są dwoma skończonymi liniowymi porządkami o mocach większych niż 2^m, to $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Dowód

Bez utraty ogólności niech

Dowód

Bez utraty ogólności niech

- $A = \{0, \ldots, N\}$,

Dowód

Bez utraty ogólności niech

- $A = \{0, \ldots, N\}$,
- $B = \{0, \ldots, M\}$,

Dowód

Bez utraty ogólności niech

- $A = \{0, \ldots, N\}$,
- $B = \{0, \ldots, M\}$,
- $2^m < N \leq M$.

Dowód

Bez utraty ogólności niech

- $A = \{0, \ldots, N\}$,
- $B = \{0, \ldots, M\}$,
- $2^m < N \leq M$.

Wykazujemy, że $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

Dowód

Bez utraty ogólności niech

- $A = \{0, \ldots, N\}$,
- $B = \{0, \ldots, M\}$,
- $2^m < N \leq M$.

Wykazujemy, że $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.
Dla $k \leq m$ określamy „odległość" d_k pomiędzy elementami:

$$d_k(a, b) = \begin{cases} |b - a| & \text{jeśli } |b - a| < 2^k \\ \infty & \text{wpp.} \end{cases}$$

Dowód

Bez utraty ogólności niech

- $A = \{0, \ldots, N\}$,
- $B = \{0, \ldots, M\}$,
- $2^m < N \leq M$.

Wykazujemy, że $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.
Dla $k \leq m$ określamy „odległość" d_k pomiędzy elementami:

$$d_k(a, b) = \begin{cases} |b - a| & \text{jeśli } |b - a| < 2^k \\ \infty & \text{wpp.} \end{cases}$$

Reszta dowodu na tablicy.

Gra Ehrenfeuchta

Σ – sygnatura relacyjna
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury nad Σ, dodatkowo $A \cap B = \emptyset$.

Gra Ehrenfeuchta

Σ – sygnatura relacyjna
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury nad Σ, dodatkowo $A \cap B = \emptyset$.

W gręᵢ Ehrenfeuchta $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gra dwóch graczy: I i II.

Gra Ehrenfeuchta

Σ – sygnatura relacyjna
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury nad Σ, dodatkowo $A \cap B = \emptyset$.

W <u>grę Ehrenfeuchta $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$</u> gra dwóch graczy: I i II.
Trwa ona przez m rund.

Gra Ehrenfeuchta

Σ – sygnatura relacyjna
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury nad Σ, dodatkowo $A \cap B = \emptyset$.

W gręEhrenfeuchta $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gra dwóch graczy: I i II.
Trwa ona przez m rund.
W i-tej rundzie ($i = 1, \ldots, m$) ruchy wykonują kolejno:

Gra Ehrenfeuchta

Σ – sygnatura relacyjna
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury nad Σ, dodatkowo $A \cap B = \emptyset$.

W gręEhrenfeuchta $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gra dwóch graczy: I i II.
Trwa ona przez m rund.
W i-tej rundzie ($i = 1, \ldots, m$) ruchy wykonują kolejno:

- Gracz I wybiera

Gra Ehrenfeuchta

Σ – sygnatura relacyjna
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury nad Σ, dodatkowo $A \cap B = \emptyset$.

W grę Ehrenfeuchta $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gra dwóch graczy: I i II.
Trwa ona przez m rund.
W i-tej rundzie ($i = 1, \ldots, m$) ruchy wykonują kolejno:

- Gracz I wybiera
    - jedną ze struktur,
    - jeden z elementów jej nośnika (ozn. a_i jeśli pochodzi z A, b_i, jeśli z B).

Gra Ehrenfeuchta

Σ – sygnatura relacyjna
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury nad Σ, dodatkowo $A \cap B = \emptyset$.

W gręEhrenfeuchta $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gra dwóch graczy: I i II.
Trwa ona przez m rund.
W i-tej rundzie ($i = 1, \ldots, m$) ruchy wykonują kolejno:

- Gracz I wybiera
  - jedną ze struktur,
  - jeden z elementów jej nośnika (ozn. a_i jeśli pochodzi z A, b_i, jeśli z B).
- Gracz II wybiera

Gra Ehrenfeuchta

Σ – sygnatura relacyjna
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – struktury nad Σ, dodatkowo $A \cap B = \emptyset$.

W gręEhrenfeuchta $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gra dwóch graczy: I i II.
Trwa ona przez m rund.
W i-tej rundzie ($i = 1, \ldots, m$) ruchy wykonują kolejno:

- Gracz I wybiera
  - jedną ze struktur,
  - jeden z elementów jej nośnika (ozn. a_i jeśli pochodzi z A, b_i, jeśli z B).
- Gracz II wybiera
  - pozostałą ze struktur,
  - jeden z elementów jej nośnika (ozn. a_i jeśli pochodzi z A, b_i, jeśli z B).

Zwycięzca

Zwycięzca

W ciągu m rund wybrane zostają elementy $a_1, \ldots, a_m \in A$ oraz $b_1, \ldots, b_m \in B$.

Zwycięzca

W ciągu m rund wybrane zostają elementy $a_1, \ldots, a_m \in A$ oraz $b_1, \ldots, b_m \in B$.

Gracz II wygrywa rozgrywkę, jeśli funkcja

$$h = \{\langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \ldots, m\}$$

jest częściowym izomorfizmem z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.

Zwycięzca

W ciągu m rund wybrane zostają elementy $a_1, \dots, a_m \in A$ oraz $b_1, \dots, b_m \in B$.

Gracz II wygrywa rozgrywkę, jeśli funkcja

$$h = \{\langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \dots, m\}$$

jest częściowym izomorfizmem z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.
W przeciwnym wypadku wygrywa gracz I.

Zwycięzca

W ciągu m rund wybrane zostają elementy $a_1, \ldots, a_m \in A$ oraz $b_1, \ldots, b_m \in B$.

Gracz II wygrywa rozgrywkę, jeśli funkcja

$$h = \{\langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \ldots, m\}$$

jest częściowym izomorfizmem z $\mathfrak{A}$ w $\mathfrak{B}$.
W przeciwnym wypadku wygrywa gracz I.

Gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, jeśli może wygrać każdą rozgrywkę, niezależnie od posunięć gracza I.

Twierdzenie Ehrenfeuchta

Twierdzenie Ehrenfeuchta

- Gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

Twierdzenie Ehrenfeuchta

- Gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.
- Gracz II ma dla każdego m strategię wygrywającą w grze $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A} \cong_{fin} \mathfrak{B}$.

Przykład użycia gry Ehrenfeuchta (łatwy)

Przykład użycia gry Ehrenfeuchta (łatwy)

Poniższe grafy dają się rozróżnić zdaniem o randze kwantyfikatorowej 4, ale ranga 3 nie wystarcza.

```
  *      *      *      *          *      *      *
  |      |      |      |          |      |      |
*-*-*  *-*-*  *-*-*  *-*-*      *-*-*  *-*-*  *-*-*
  |      |      |      |          |      |      |
  *      *      *      *          *      *      *
```

Przykład użycia gry Ehrenfeuchta (trudniejszy)

Twierdzenie Jeśli $\mathfrak{A} = \langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \leq^{\mathfrak{B}} \rangle$ są oba

Przykład użycia gry Ehrenfeuchta (trudniejszy)

Twierdzenie Jeśli $\mathfrak{A} = \langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \leq^{\mathfrak{B}} \rangle$ są oba

- porządkami liniowymi,

Przykład użycia gry Ehrenfeuchta (trudniejszy)

Twierdzenie Jeśli $\mathfrak{A} = \langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \leq^{\mathfrak{B}} \rangle$ są oba

- porządkami liniowymi,
- gęstymi

Przykład użycia gry Ehrenfeuchta (trudniejszy)

Twierdzenie Jeśli $\mathfrak{A} = \langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \leq^{\mathfrak{B}} \rangle$ są oba

- porządkami liniowymi,
- gęstymi
- bez elementu pierwszego i ostatniego

Przykład użycia gry Ehrenfeuchta (trudniejszy)

Twierdzenie Jeśli $\mathfrak{A} = \langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \leq^{\mathfrak{B}} \rangle$ są oba

- porządkami liniowymi,
- gęstymi
- bez elementu pierwszego i ostatniego

to

Przykład użycia gry Ehrenfeuchta (trudniejszy)

Twierdzenie Jeśli $\mathfrak{A} = \langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \leq^{\mathfrak{B}} \rangle$ są oba

- porządkami liniowymi,
- gęstymi
- bez elementu pierwszego i ostatniego

to

- $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Przykład użycia gry Ehrenfeuchta (trudniejszy)

Twierdzenie Jeśli $\mathfrak{A} = \langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$ i $\mathfrak{B} = \langle B, \leq^{\mathfrak{B}} \rangle$ są oba

- porządkami liniowymi,
- gęstymi
- bez elementu pierwszego i ostatniego

to

- $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Dowód na tablicy.

Wniosek

$$\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle.$$

Wniosek

$\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$.
Zatem nie ma zdania logiki pierwszego rzędu, które definiuje pojęcie porządku ciągłego (tzn. takiego, w którym wszystkie niepuste ograniczone podzbiory mają kres górny i kres dolny).

Teorie, teorie zupełne

Teorie, teorie zupełne

Teoria to zbiór zdań zamknięty ze względu na konsekwencje semantyczne, tj. taki zbiór zdań Δ, że $\Delta \models \varphi$ zachodzi tylko dla $\varphi \in \Delta$.

Teorie, teorie zupełne

<u>Teoria</u> to zbiór zdań zamknięty ze względu na konsekwencje semantyczne, tj. taki zbiór zdań Δ, że $\Delta \models \varphi$ zachodzi tylko dla $\varphi \in \Delta$.

Przykłady teorii:

Teorie, teorie zupełne

Teoria to zbiór zdań zamknięty ze względu na konsekwencje semantyczne, tj. taki zbiór zdań Δ, że $\Delta \models \varphi$ zachodzi tylko dla $\varphi \in \Delta$.

Przykłady teorii:

- $\{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\}$, zwany teorią aksjomatyczną wyznaczoną przez Γ

Teorie, teorie zupełne

Teoria to zbiór zdań zamknięty ze względu na konsekwencje semantyczne, tj. taki zbiór zdań Δ, że $\Delta \models \varphi$ zachodzi tylko dla $\varphi \in \Delta$.

Przykłady teorii:

- $\{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\}$, zwany teorią aksjomatyczną wyznaczoną przez Γ
- $\mathbf{Th}(\mathcal{K}) = \{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi, \text{ dla każdego } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}$ (teoria klasy struktur $\mathcal{K}$)

Teorie, teorie zupełne

Teoria to zbiór zdań zamknięty ze względu na konsekwencje semantyczne, tj. taki zbiór zdań Δ, że $\Delta \models \varphi$ zachodzi tylko dla $\varphi \in \Delta$.

Przykłady teorii:

- $\{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\}$, zwany teorią aksjomatyczną wyznaczoną przez Γ
- $\mathbf{Th}(\mathcal{K}) = \{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi, \text{ dla każdego } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}$ (teoria klasy struktur $\mathcal{K}$)
- $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ (teoria modelu $\mathfrak{A}$).

Teorie zupełne

Teorie zupełne

Teorię Δ nazywamy zupełną, gdy dla każdego zdania φ, dokładnie jedno ze zdań φ i $\neg\varphi$ należy do Δ.

Teorie zupełne

Teorię Δ nazywamy zupełną, gdy dla każdego zdania φ, dokładnie jedno ze zdań φ i $\neg\varphi$ należy do Δ.

Teoria modelu jest zawsze zupełna, teoria aksjomatyczna i teoria klasy struktur nie muszą być zupełne.

Teorie zupełne

Teorię Δ nazywamy zupełną, gdy dla każdego zdania φ, dokładnie jedno ze zdań φ i $\neg\varphi$ należy do Δ.

Teoria modelu jest zawsze zupełna, teoria aksjomatyczna i teoria klasy struktur nie muszą być zupełne.

Wniosek (z ostatniego twierdzenia) Teoria klasy $\mathcal{A}$ wszystkich porządków liniowych, gęstych, bez elementu pierwszego i ostatniego jest zupełna.